A. Z. ALZAHRANI

الفصل الرابع: الحركة في بعدين وثلاثة أبعاد Motion in Two and Three Dimensions

الجزء الأول: الإزاحة، السرعة، التسارع

كما تعودنا في الفصل الثاني أن حركة أي جسم -في خط مستقيم- توصف بدلالة ثلاث كميات : المسافة (الإزاحة)، السرعة، التسارع بالإضافة إلى الزمن. ومن هذا المنطلق فإننا سنتبع نفس الخطوات السابقة لوصف حركة جسيم يتحرك في مستوى (بعدين) أو فضاء (ثلاثة أبعاد)

١- الإزاحة Displacement

$$\vec{r} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$

٢- السرعة المتوسطة واللحظية Average and instantaneous velocity

(i) Average velocity

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} = v_{av,x}\hat{i} + v_{av,y}\hat{j} + v_{av,z}\hat{k}$$

(ii) Instantaneous velocity

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

٣- التسارع المتوسط واللحظي Average and instantaneous acceleration

(i) Average acceleration

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k} = a_{av,x}\hat{i} + a_{av,y}\hat{j} + a_{av,z}\hat{k}$$

(ii) Instantaneous acceleration

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

EXAMPLES

(1)

Two points are located as follow: R=(1,3,7) and Q=(-2,0,1). Find the displacement vector RQ

SOLUTION

بما أننا ذكرنا المتجه RQ فهذا يعني ان بداية المتجه هي النقطة R ونهايته عبارة عن النقطة Q وبالتالي سيكون متجه الازاحة يساوي نقطة النهاية مطروح منها نقطة البداية

$$RQ = \vec{r} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$
$$RQ = (-2 - 1)\hat{i} + (0 - 3)\hat{j} + (1 - 7)\hat{k}$$
$$RQ = -3\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

(2)

Suppose the position of an object moving in the *x-y* plane is described by the following expression: $\vec{r}(t) = (2t - 3)\hat{i} + (t^2 - 3t + 4)\hat{j}$ in the SI units. (a) Find position, velocity, and acceleration at the times $t = 2$ s. (b) Determine the magnitude and direction (with y-axis) of average velocity in the interval [0,4 s]

SOLUTION

(a)

بما ان السؤال طلب منك ايجاد المسافة والسرعة والتسارع عند لحظة معينة وليست فترة زمنية، فهذا يعني ان المطلوب سرعة وتسارع لحظي

بالنسبة للمسافة، نعوض مباشرة بالزمن في المعادلة المعطاة فنجد أن

$$\vec{r}(t) = (2t - 3)\hat{i} + (t^2 - 3t + 4)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t = 2) = (2\times 2 - 3)\hat{i} + (2^2 - 3\times 1 + 4)\hat{j}$$
$$\vec{r}(t = 2) = \hat{i} + 5\hat{j}$$

ولايجاد السرعة اللحظية، فإننا نجد من المعادلة

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

وبتفاضل دالة الازاحة بالنسبة للزمن، نجد ان دالة السرعة

$$\vec{v}(t) = 2\hat{i} + (2t - 3)\hat{j}$$

وبالتعويض عن الزمن في الدالة، نستنتج ان

$$\vec{v}(t = 2) = 2\hat{i} + (2\times 2 - 3)\hat{j} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

وبالمثل فإن التسارع اللحظي يعطى بالعلاقة

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

وبتفاضل دالة السرعة بالنسبة للزمن، نجد ان

$$\vec{a}(t) = 2\hat{j}$$

$$\vec{a}(t = 2) = 2\hat{j}$$

ومنها نجد التالي:

ان التسارع لايعتمد على الزمن (بمعنى انه ثابت القيمة عند أي لحظة)، وثابت الاتجاه، فالجسم يتسارع باتجاه محور الصادات (أي أن سرعته تتغير في اتجاه الصادات بينما هي ثابتة على المحور السيني

(b)

من العلاقات السابقة، نجد ان السرعة المتوسطة تعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

حيث ان الازاحة في هذه الفترة تساوي

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_{t=4} - \vec{r}_{t=0}$$

$$\vec{r}_{t=4} = (2\times 4 - 3)\hat{i} + (4^2 - 3\times 4 + 4)\hat{j} = 5\hat{i} + 8\hat{j}$$

$$\vec{r}_{t=0} = (2\times 0 - 3)\hat{i} + (0^2 - 3\times 0 + 4)\hat{j} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_{t=4} - \vec{r}_{t=0} = (5 - (-3))\hat{i} + (8 - 4)\hat{j} = 8\hat{i} + 4\hat{j}$$

ومنها نجد ان السرعة المتوسطة في هذه الفترة تساوي

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{8\hat{i} + 4\hat{j}}{4 - 0} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

ولكن السؤال لم يطلب السرعة (كمتجه) ولكن قيمة هذه السرعة والزاوية التي تصنعها مع محور الصادات الموجب.....قيمة السرعة المتوسطة تساوي

$$|\vec{v}_{av}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = 2.25\ m/s$$

من الفصل الثالث عرفنا ان الزاوية التي يصنعها المتجه مع أي محور (وليكن الصادي) تعطى بالعلاقة

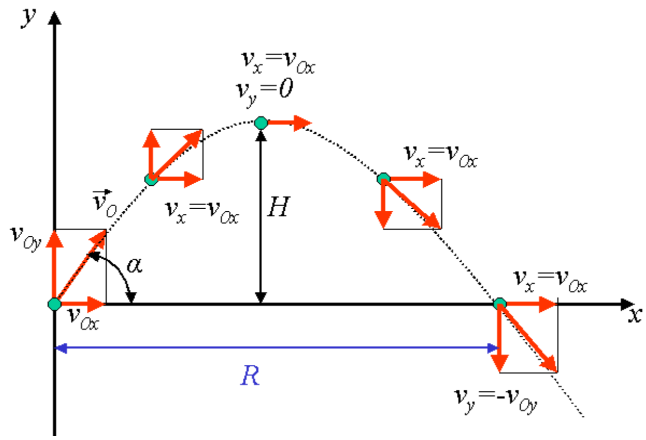
$$\theta_y = \cos^{-1}\left[\frac{A_y}{|\vec{A}|}\right]$$

أذاً نجد ان الزاوية التي تصنعها السرعة المتوسطة مع محور الصادات الموجب تساوي

$$\theta_y = \cos^{-1}\left[\frac{v_{av,y}}{|\vec{v}_{av}|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2.25}\right] = 63.43^0$$

الجزء الثاني: المقذوفات Projectiles

يعرف المقذوف بأنه جسم يتحرك في مستوى تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية (إذا أهملنا أي قوى أخرى مثل احتكاك الهواء) وبالتالي ستكون حركته في المحور السيني (حيث لايوجد تسارع) ثابته بينما تتغير في الاتجاه الصادي (حيث تسارع الجاذبية الأرضية).. ومن هنا فإن القوانين التي يخضع لها المقذوف هي نفس القوانين التي ذكرتها في الفصل الثاني



في الجدول التالي سوف أفصل الحركة إلى قسمين: أفقية وعمودية

Projectile Motion Equations	
Horizontal motion	**Vertical motion**
$v_x = v_0 \cos\theta$	$v_y = v_0 \sin\theta - gt$
$x = (v_0 \cos\theta)t$	$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$
Range, $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$	Max. height , $H = \dfrac{(v_o \sin\theta)^2}{2g}$
$y = x\tan\theta - \dfrac{g\,x^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$	
Time to reach maximum height is $t_H = \dfrac{v_o \sin\theta}{g}$	
Time to reach range is $t_R = 2t_H = \dfrac{2v_o \sin\theta}{g}$	

ملاحظات

١- عند الوصول لأقصى ارتفاع فإن المركبة الصادية للسرعة تساوي صفر

٢- إن أقصى (أقصى ارتفاع) يمكن أن يصل إليه الجسم يكون عندما يطلق بزاوية مقدارها ٩٠ درجة مع الأفقي، هذا يعني

$$H_{\max} = \frac{v_o^2}{2g}$$

٣- إن أقصى (مدى) يمكن أن يصل إليه الجسم يكون عندما يطلق بزاوية مقدارها ٤٥ درجة مع الأفقي، هذا يعني

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

EXAMPLES

(1)

A ball is thrown with an initial velocity of 20 m/s at an angle of 30°above the ground. Find the maximum height the ball can reach and the time taken to hit the ground again.

SOLUTION

بالتعويض في معادلة أقصى ارتفاع، نجد أن

$$H = \frac{(v_o \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(20\times \sin 30)^2}{2\times 9.8} = 5.1\,m$$

الزمن اللازم للرحلة (من اطلاق الجسم لاصطدامه بالارض مرة أخرى) يساوي

$$t_R = \frac{2v_o \sin\theta}{g} = \frac{2\times 20\times \sin 30}{9.8} = 2.04\,s$$

(2)

A ball is thrown horizontally with an initial velocity of 25 m/s from the top of a 60-m high building.

a. How much time will it take the ball to hit the ground?

b. How far does the ball travel horizontally?

c. What is the velocity (magnitude and direction) of the ball as it hits the ground?

SOLUTION

(a)

بالنسبة للنقطة الأولى فنعلم أن

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

وبما أن الجسم أطلق أفقياُ فهذا يعني ان الزاوية تساوي صفر وبالتالي تصبح المعادلة السابقة على الشكل التالي

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-2y}{g}}$$

من المهم هنا أن تلاحظ أن الجسم يسقط للأسفل وهذا يعني ان اشارة الازاحة ستكون سالب وبالتعويض في المعادلة، نجد ان الزمن يساوي

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2\times(-60)}{9.8}} = 3.5\,s$$

(b)

لحساب المسافة الأفقية التي قطعها الجسم نستخدم المعادلة التالية

$$x = (v_0 \cos\theta)t$$

وحيث ان الزاوية تساوى صفر تصبح المعادلة السابقة على الشكل التالي

$$x = v_0 t$$

ومنها نجد ان المسافة الأفقية تساوي

$$x = 25\times 3.5 = 87.5\,m$$

(c)

أولا المركبة السينية للسرعة تحسب من العلاقة

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

وحيث ان الزاوية تساوى صفر نجد ان

$$v_x = v_0 = 25\,m/s$$

ثانياً المركبة الصادية للسرعة تحسب من العلاقة

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

وحيث ان الزاوية تساوى صفر نجد ان

$$v_y = -gt = -9.8 \times 3.5 = -34.3\, m/s$$

وبالتالي فإن مقدارالسرعة سيكون

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25^2 + (-34.3)^2} = 42.44\, m/s$$

الزاوية التي يصنعها المتجه مع المحور السيني

$$\theta_x = \cos^{-1}\left[\frac{v_x}{|\vec{v}|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{25}{42.44}\right] = 53.9^0$$

(3)

A rifle is aimed horizontally at a target 20m away. If bullet hits the target 2 cm below the aiming point, calculate (a) the bullet's time of flight and (b) the muzzle velocity?

SOLUTION

(a)

بالنسبة للنقطة الأولى فنعلم أن

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

وبما أن الجسم أطلق أفقياُ فهذا يعني ان الزاوية تساوى صفر وبالتالي تصبح المعادلة السابقة على الشكل التالي

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \to \quad t = \sqrt{\frac{-2y}{g}}$$

من المهم هنا أن تلاحظ أن الجسم يسقط للأسفل وهذا يعني ان اشارة الازاحة ستكون سالبة، وبالتعويض في المعادلة، نجد ان الزمن يساوي

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2\times(-0.02)}{9.8}} = 0.064\,s$$

(b)

من المعادلة العامة، نجد أن

$$y = x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$$

ولكن زاوية الاطلاق كانت أفقية (تساوي صفر) بالتالي ستكون المعادلة على الشكل التالي

$$y = -\frac{g\,x^2}{2v_o^2}$$

وباعادة كتابة المعادلة بحيث يكون المجهول في طرف، نجد ان

$$v_0 = \sqrt{-\frac{g\,x^2}{2y}}$$

من المهم هنا أن تلاحظ أن الجسم يسقط للأسفل وهذا يعني ان اشارة الازاحة ستكون سالب وبالتعويض في المعادلة، نجد ان السرعة

$$v_0 = \sqrt{-\frac{9.8\times 20^2}{2\times(-0.02)}} = 313\,m/s$$

Exercise: Solve Part (b) in different method by including Part (a) in the calculation.

(4)

A ball is thrown with a speed of 25.0 m/s at an angle of 40.0°above the horizontal directly toward a wall. The wall is 22.0m away from the release point of the ball. How far above the release point does the ball hit the wall?

SOLUTION

من المعادلة العامة، نجد أن

$$y = x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$$

$$y = 22\tan 40 - \frac{9.8\times 22^2}{2(25\cos 40)^2} = 12\,m$$

(5)

A projectile is fired in such a way that its horizontal range is equal to three times its maximum height. What is the angle of projection?

SOLUTION

من السؤال، يتضح أن

$$R = 3H$$

من معادلتي اقصى ارتفاع والمدى، نجد ان المعادلة السابقة ستكون على الشكل التالي

$$\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} = 3\left[\frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}\right]$$

ولكن من الدوال الهندسية نعرف أن

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

وعليه فإن المعادلة السابقة تصبح

$$\frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = 3\left[\frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}\right]$$

وباختصار المتشابهات، نجد ان

$$2\cos\theta = 3\left[\frac{\sin\theta}{2}\right] \quad \to \quad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53.1^0$$

(6)
A projectile is fired to achieve a maximum range of 140 m. What should its speed be?

SOLUTION

من معادلة اقصى مدى والتي تتحقق عندما يطلق المقذوف بزاوية 45 فوق الافقي، نجد ان

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \to \quad v_0 = \sqrt{R_{\max} g}$$

$$v_0 = \sqrt{140 \times 9.8} = 37\, m/s$$

(7)
A projectile is fired with an angle θ above the horizontal. It takes 15 s to reach its range of 140 m. What is its speed at the highest point?

SOLUTION

نعلم ان المركبة الصادية للسرعة عند اقصى ارتفاع تساوي صفر، بالتالي بقي لنا ان نوجد المركبة السينية فقط

فمن معادلات الحركة الافقية، نجد ان المسافة الأفقية تعكى بالعلاقة

$$x = (v_0 \cos\theta)t = v_{0x}t \quad \rightarrow \quad v_{0x} = \frac{x}{t}$$

$$v_{0x} = \frac{140}{15} = 9.34\, m/s$$

(8)

A projectile is fired with initial speed of v at an angle Q above the horizontal. Two seconds later, the velocity of the projectile is determined to be v(t)=18.2 i - 11.15 j (m/s). What is its initial speed ?

SOLUTION

نعلم ان سرعة المقذوف عند اي لحظة تكتب على الشكل التالي

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

اذا بمقارنة المعادلة المعطاة في السؤال بالمعادلة السابقة، نجد ان

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 18.2 \qquad [1]$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta - gt = -11.15$$

$$v_0 \sin\theta - 9.8 \times 2 = -11.15 \rightarrow v_0 \sin\theta = 8.45 \quad [2]$$

بقسمة المعادلتين على بعضهما (2 على 1)، نجد ان

$$\tan\theta = \frac{8.45}{18.2} \quad \rightarrow \quad \theta = 24.9$$

ومنها نجد ان السرعة الابتدائية تساوي

$$v_0 \cos\theta = 18.2 \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{18.2}{\cos 24.9} = 20\, m/s$$

الجزء الثالث: الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion

عندما يدور (أو يتحرك) جسيم في دائرة نصف قطرها r وبسرعة مقدارها v فإنه يكتسب تسارعا مركزياً Centripetal acceleration اتجاهه لمركز الدائرة بينما مقداره يعطى من خلال العلاقة التالية

$$a = \frac{v^2}{r}$$

جدير بالذكر ان سرعة الجسم عند أي نقطة تكون مماسية tangential للدائرة وبالتالي فإنها عمودية على التسارع المركزي

وبما أن الحديث عن حركة دائرية، فإننا سنتطرق إلى بعض الكميات التي تصاحب هذا النوع من الحركة، منها الآتي:

١- **الزمن الدوري period** : وهو الزمن اللازم للجسيم لكي يتم دورة كاملة. ويحسب هذا الزمن من العلاقة التالية

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

٢- **التردد frequency** : وهو عدد الدورات التي اتمها الجسم خلال ثانية واحدة..وهو مقلوب الزمن الدوري

$$f = \frac{1}{T}$$

٣- **التردد الزاوي angular frequency** : ويعرف بالعلاقة التالية

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

حيث نجد من المعادلات السابقة أن

$$v = \omega r$$

EXAMPLES

(1)

A car orbits a circular track of radius 20 m with a constant speed of 25 m/s. Find out its centripetal acceleration.

SOLUTION

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{25^2}{20} = 31.25\, m/s^2$$

(2)

A bicycle completes 4 revolutions around a circular path of radius 10 m in 2 min. Calculate its acceleration.

SOLUTION

من المعطيات نجد ان الدراجة اكملت ٤ دورات في زمن قدره دقيقتين، وهذا يعني انها تكمل دورة كاملة في نصف دقيقة

$$T = \frac{2 \times 60}{4} = 30\, s$$

ومنها نستطيع حساب السرعة من العلاقة التالية

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 10}{30} = 2.1\, m/s$$

وعليه فإن التسارع المركزي سيكون

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{2.1^2}{10} = 0.44\, m/s^2$$